Raciocínio e tecnologia

Os *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*, publicação traduzida e editada pela APM em 2007, contém, para além das Normas de Conteúdo, ou seja, os conteúdos a aprender, como a Geometria ou a Álgebra, as Normas de Processo, que indicam as formas de adquirir e utilizar os conhecimentos, de que são exemplos a Comunicação e o Raciocínio que aqui surge associado com a Demonstração.

Tendo em conta a temática desta Revista, vamos deter-nos um pouco sobre o raciocínio procurando a sua relação com o uso da tecnologia.

Desde o pré-escolar e os primeiros anos de escolaridade, que se reconhece a importância de estimular os alunos a estabelecer conjecturas, procurando provas, o que é favorecido pela criação e descrição de padrões geométricos e numéricos, num ambiente de trabalho que aponta para uma matemática que se compreende.

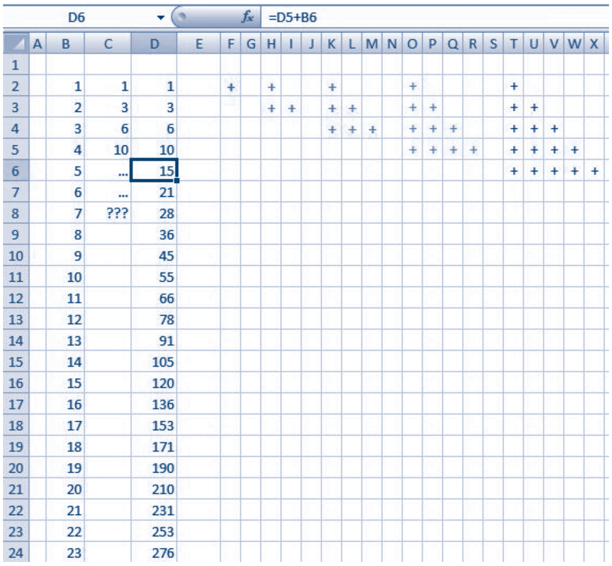
Nos anos 3º–5º, sugere-se que o raciocínio se desenvolve quando os alunos são encorajados a exporem as suas ideias e em que formular conjecturas e tentar justificá-las é uma parte integrante da actividade matemática dos alunos, abordagem que é desenvolvida e aprofundada nos anos seguintes. Neste sentido, nos níveis 6º–8º, à medida que, por exemplo, analisam padrões e estruturas para a identificação de regularidades e que formulam generalizações, devem ser convidados a argumentar, analisando a plausibilidade das suas conjecturas e apresentando aos outros as linhas do raciocínio que seguiram, de modo a poderem ser avaliadas.

Ao longo dos anos e até ao final do ensino secundário, o trabalho de questionamento (o porquê?) constante, as oportunidades de comunicar e partilhar estratégias e resultados, argumentar e ouvir os argumentos dos outros, conduzem a um progressivo domínio de várias formas de raciocinar numa grande variedade de contextos matemáticos ou de aplicação e ao uso de processos demonstrativos, progressivamente mais apurados.

Até que ponto a tecnologia vem estimular o desenvolvimento do raciocínio? Ou, pelo contrário, como alguns afirmam, torna os alunos mais *mandriões*, mais *dependentes das máquinas* e menos críticos?

Vamos partir do exemplo referido na página 311 dos *Princípios e Normas*, em que a professora, após explicar o conceito de número triangular, pede aos alunos de um 7º ano de escolaridade que representem os primeiros cinco números triangulares, desenvolvendo uma estrutura de pontos que os ajude a ver o que acontece, quando se passa de um número triangular ao seguinte.

A partir daí, pedem-se vários "números seguintes" e … porque não, o centésimo termo, o que obriga a reflectir sobre o processo seguido até aí, eminentemente recursivo e desajustado para responder à pergunta, uma vez que obriga a saber o 99º.



D6 =D5+B6

	B	C	D
1			
2	1	1	1
3	2	3	3
4	3	6	6
5	4	10	10
6	5	...	15
7	6	...	21
8	7	???	28
9	8		36
10	9		45
11	10		55
12	11		66
13	12		78
14	13		91
15	14		105
16	15		120
17	16		136
18	17		153
19	18		171
20	19		190
21	20		210
22	21		231
23	22		253
24	23		276

Figura 1

Que vantagem podemos tirar aqui do uso da tecnologia?

Com uma folha de cálculo podemos simular a situação que está a acontecer (ver figura 1). Os alunos podem ser convidados a escrever numa coluna (B) o conjunto dos números naturais (o número de ordem de cada número triangular) e os primeiros quatro números triangulares na coluna ao lado (C). Deve-lhes ser dado tempo para observarem os dados e tentarem perceber o que está a acontecer, cada vez que é gerado um novo número triangular, constituindo os desenhos dos triângulos (representados, na figura 1, através de cruzes) uma visualização que pode auxiliar a encontrar uma resposta. Na imagem, pode observar-se que o desenho de cada triângulo se obtém do anterior, acrescentando uma linha de pontos igual ao número de ordem do triângulo. Por exemplo, para calcular o termo de ordem n=4, ao triângulo anterior, com 6 pontos, acrescenta-se 4, para obter o novo triângulo com 10 pontos e assim sucessivamente.

Não será difícil, após alguns momentos de discussão, entender que o processo recursivo se resume a juntar à soma acumulada nos números anteriores, o número correspondente à ordem. É isso que observamos na imagem, no cálculo do 5º número triangular: na célula D6 (=D5+B6), o conteúdo calculado é 15, ou seja, $(1+2+3+4)+5 = 10+5$, que tem uma visualização geométrica na figura triangular mais à direita, na folha de cálculo representada na figura 1. Copiando agora esta fórmula ao longo da coluna D e tão longe quanto se queira, obtemos a resposta para o termo de ordem 100 ou superior, até que a capacidade máxima de representação numérica do programa seja ultrapassada.

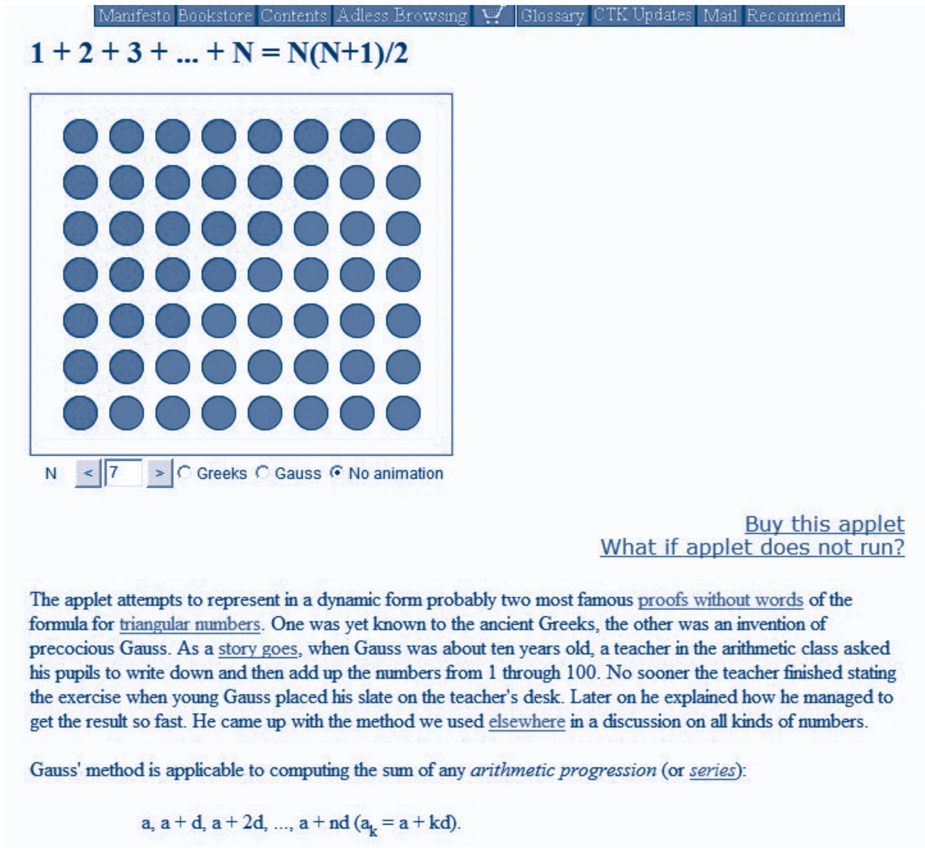


Figura 2

Claro que aqui já reconhecemos algum valor à tecnologia, nomeadamente à folha de cálculo, quer porque facilmente gera recursivamente centenas ou milhares de termos, quer porque ao fazê-lo permite que os alunos observem as relações entre os números, discutam e coloquem mais conjecturas, o que só acontece no contexto de questões e desafios apropriados lançados pelo professor e de uma discussão por ele bem conduzida. Na folha de cálculo, substituir uma fórmula (normalmente, uma combinação de endereços de células) por outra e copiar ao longo de uma coluna "por arrasto" para ver o que sucede, é um processo instantâneo que pode fazer parte do processo de generalização, mas também do de verificação e prova.

No entanto, até agora continua por encontrar um processo explícito, uma expressão geradora de qualquer termo da sequência, sem que para o efeito seja necessário conhecer o termo anterior. Provavelmente, poucos alunos serão capazes de reconhecer, através da tabela, que cada termo pode ser encontrado através da semi-soma do produto da ordem desse termo pela ordem seguinte (o 5º termo, 15, pode ser calculado multiplicando a ordem, 5, por 6 e dividindo, em seguida por 2).

Assim, fomos procurar recursos na Internet e nas referências finais do novo Programa de Matemática do Ensino Básico, em *Recursos: sítios e materiais na Internet*, encontrámos o site `http://www.cut-the-knot.org` que disponibiliza algumas centenas de actividades interactivas, uma das quais nos chamou a atenção porque se intitulava, *Sum of consecutive integers is triangular*. Por curiosidade, fomos ver e encontrámos uma actividade que oferece um modelo geométrico dinâmico e uma explicação e prova analítica para a relação entre a soma dos inteiros consecutivos e os números triangulares, de certo modo, aquilo que procurávamos.

O método de Gauss para encontrar rapidamente a soma de qualquer número de inteiros consecutivos encontra-se aí bem ilustrado. Na figura 2, seleccionámos n=7, para calcular 1+2+3+4+5+6+7, que pode ser visto eventualmente como o conjunto das bolas de cor que crescem, do lado esquerdo, de baixo (1) para cima (7). O método apoia-se no facto de podermos adicionar a estes elementos os da sequência in-

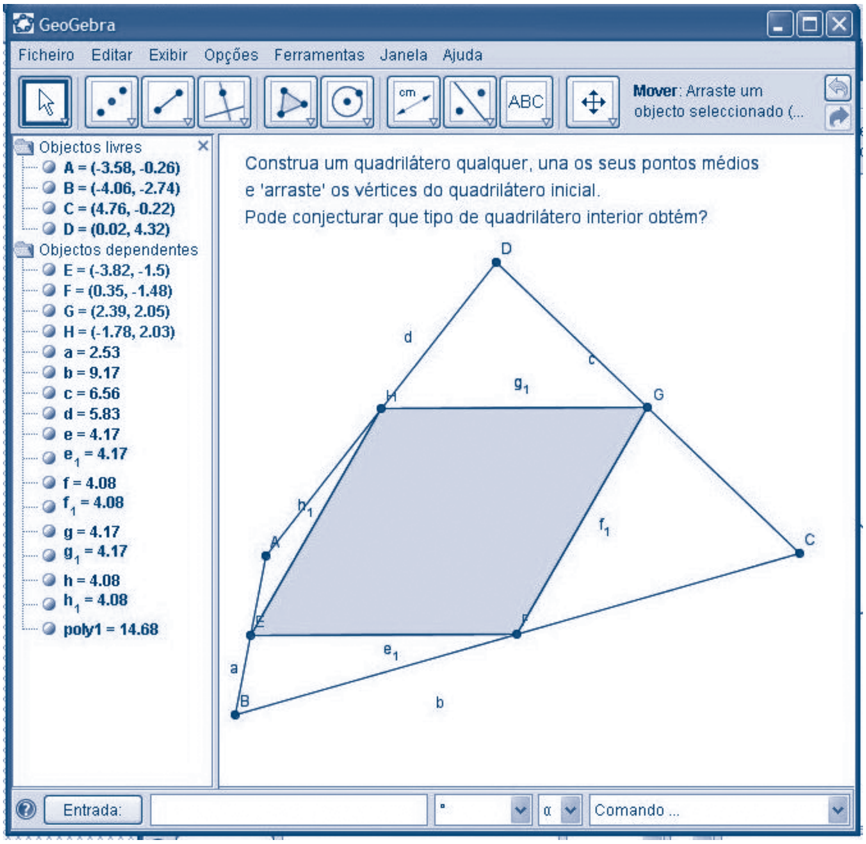


Figura 3

versa (por exemplo, 1+7; 2+6; 3+5; 4+4), sendo que cada linha tem sempre o mesmo número de elementos (8) tão bem ilustrado no rectângulo de 7x8 da figura. Claro que o resultado são 56 pontos, produto relativamente ao qual teremos agora de calcular a metade, uma vez que adicionámos os termos de duas sequências (em ordem ascendente e descendente) e não de uma, que nos conduz ao valor 28, que corresponde ao 7º número triangular (ver também a folha de cálculo, na figura 1).

Torna-se aqui evidente que a soma dos 7 inteiros consecutivos é igual a (7x8)/2 e que, para n termos, teremos uma expressão geral $n \times (n+1)/2$, expressão tão bem conhecida dos alunos do ensino secundário e que traduz a soma dos n termos de uma progressão aritmética de razão 1 e para a qual encontramos uma prova analítica no referido site.

Um problema que se poderia ter iniciado com umas fichas de cor nos primeiros anos de escolaridade, explorando apenas padrões geométricos, pode progressivamente ser conduzido a níveis mais elevados de exploração de natureza numérica e algébrica e a tecnologia pode ser uma mais-valia no processo de gerar números, evidenciar relações, permitir múltiplas representações e disponibilizar informação pertinente e modelos visuais facilitadores da apropriação dos conceitos.

Num Ambiente de Geometria Dinâmica (AGD) como o Geogebra, o Geometer's Sketchpad ou o Cabri, averiguar o que se passa com a figura que resulta de unir os pontos médios de lados consecutivos de um quadrilátero qualquer, pode ser um desafio que estimula também o desenvolvimento do raciocínio e convida à procura de justificações e à prova (ver figura 3).

A figura, por mais que se "arrastem" os vértices do quadrilátero inicial, parece manter-se sempre um paralelogramo, o que se pode confirmar em cada momento, medindo lados, ângulos e averiguando quanto ao paralelismo entre dois lados opostos. Mas isto não constitui ainda uma prova, no sentido matemático do termo. No entanto, as características do programa, permitindo a construção instantânea de uma grande diversidade de quadriláteros dos mais "convencionais" aos mais "enviesados", através da propriedade do "arrasto", fornecem evidência suficiente que suporta a conjectura que se trata de um paralelogramo. A figura obtida, embora assuma várias formas, mantém invariantes o paralelismo entre os lados opostos e as dimensões dos lados e amplitudes dos ângulos opostos.

Para o demonstrarmos, precisamos de nos apoiar na semelhança de triângulos, através da igualdade das amplitudes dos ângulos e da proporcionalidade entre os lados homólo-

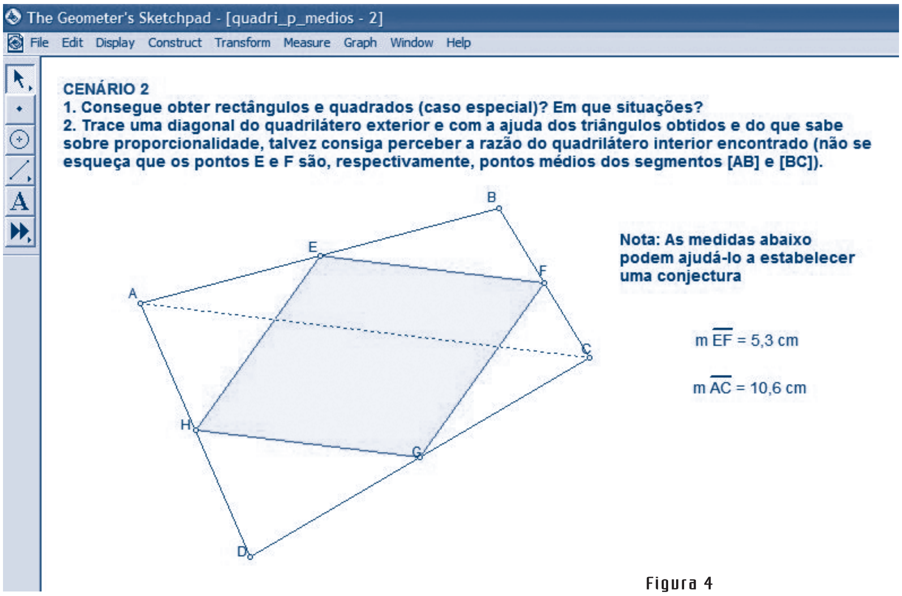
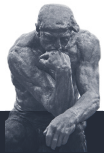


Figura 4

gos. Suporte e apoio a esta prova estão disponíveis nas páginas 34 e 35 da publicação *A Matemática na Educação Básica*, editada pelo DEB, em 1999. Aos alunos poderão ser dadas "pistas" no próprio AGD (ver figura 4).

Não seria suficiente, o espaço desta e doutra revista, para dar exemplos de programas computacionais que podem promover o desenvolvimento do raciocínio, seja ele de natureza mais numérica, geométrica ou algébrica. A folha de cálculo, *applets* ou um AGD, podem desempenhar esse papel. Podem, porque têm características que favorecem o confronto dos alunos com a surpresa da regularidade que surgiu da "cópia" ao longo da coluna da folha de cálculo ou do "arrasto" da figura no AGD. Podem, porque permitem visualizar de imediato o impacto de pequenas mudanças numa variável, num valor numérico ou numa figura, em diferentes representações, sejam elas geométricas, uma tabela ou um gráfico. Podem, porque fornecem modelos e informam sobre o seu maior ou menor ajuste a um conjunto de dados. Mas estas características constituem apenas um potencial que se revela e se aprofunda de acordo com a forma como o professor for colocando as questões, dando tempos para observação individual das tabelas de valores e dos gráficos, na procura de relações, para a discussão em pequeno grupo e para a partilha de estratégias, reflexão e confronto de argumentos com toda a turma. Em resumo: só o professor pode promover o desenvolvimento do raciocínio, mas nunca como agora a tecnologia lhe ofereceu tantas e tão diversificadas oportunidades de ir até onde nunca imaginou poder ir.

José Duarte



Raciocinar... em Música [ii]

Crescemos a ouvir falar das qualidades da música no desenvolvimento do raciocínio. Se pensarmos nos três elementos estruturantes da música percebemos porquê. A harmonia obriga-nos a relacionar as notas entre si e a imaginar as infinitas possibilidades de agrupamento de sons. A melodia, apesar de nos levar a um exercício semelhante, relaciona-se com o tempo de maneira diferente: podemos pensar no som de um acorde numa fracção de tempo, mas uma melodia para existir precisa de tempo e o acto de a imaginar exercita essa relação. Finalmente, o ritmo, onde mais facilmente vemos a presença matemática, nos compassos simples, compostos ou complexos. Mas o raciocínio mais estimulante e complexo é o que conjuga todos os anteriores com a abstracção necessária para a criação musical. Provavelmente nenhum é tão esmagador como o de Beethoven ao escrever a sua última sinfonia surdo.

Mário Laginha **[Pianista e Compositor]**